Forces, travail, énergie

Les lois de Newton

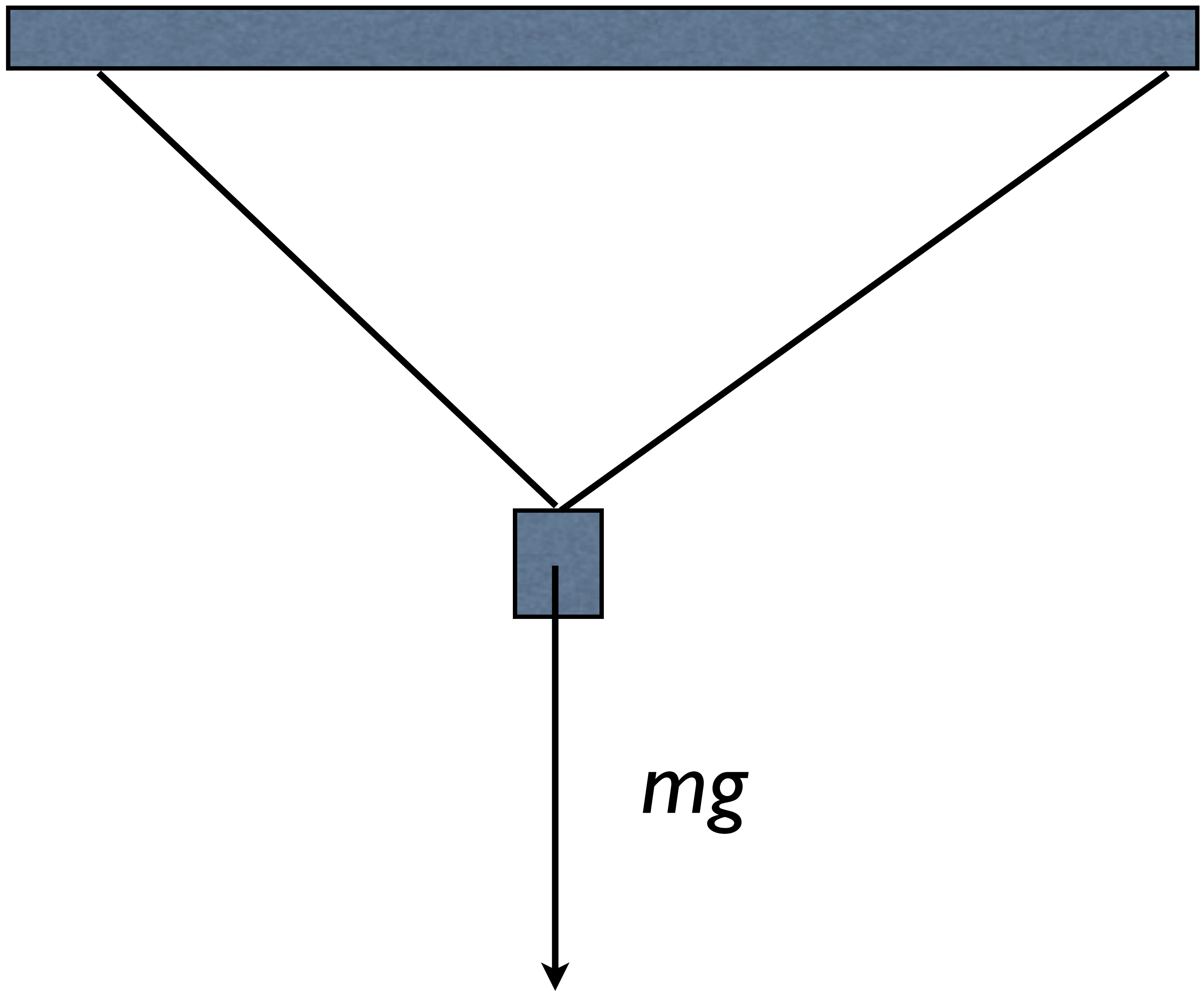
1. Il existe des référentiels dans lesquels tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, à moins qu'une force n'agisse sur lui.

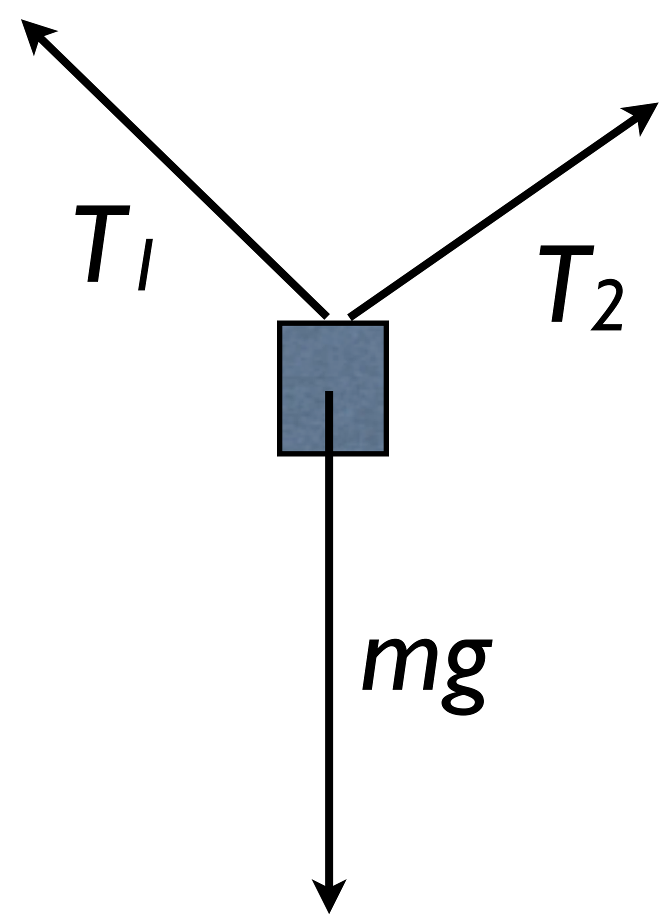
2. L'accélération est proportionnelle à la force et se fait dans le sens de la force

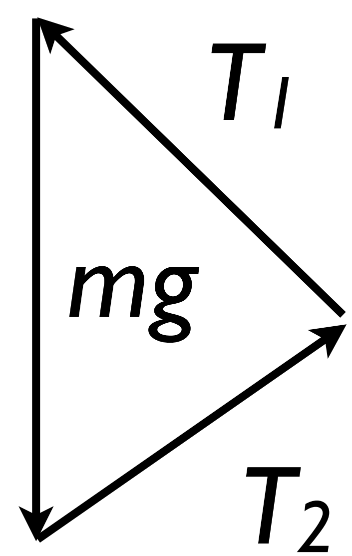
$$m\vec{a} = \vec{F}$$

3. Si un corps exerce une force sur un autre, cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier:

$$\vec{F}_{2\rightarrow 1} = -\vec{F}_{1\rightarrow 2}$$

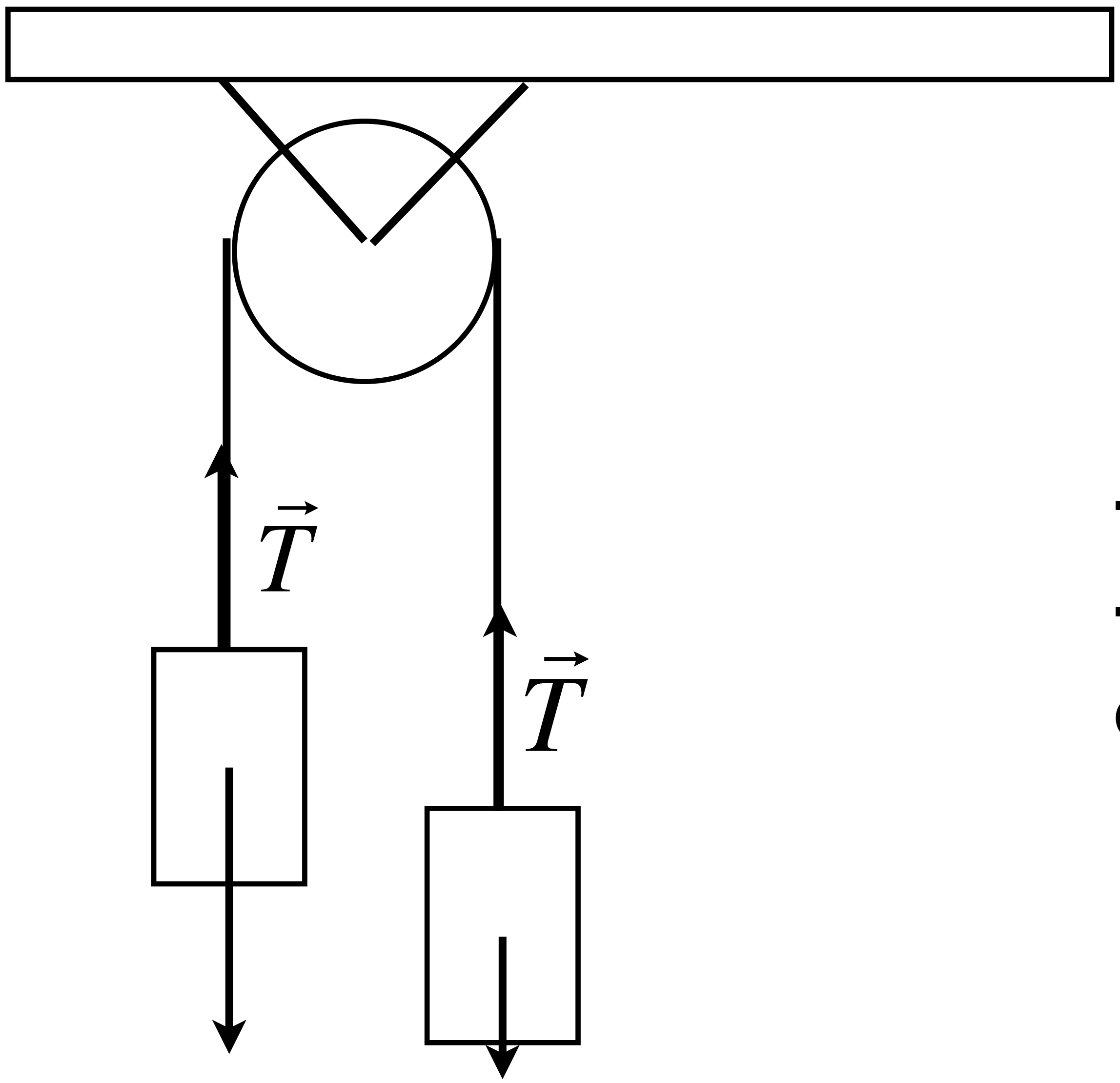

mg


T_1
T_2
mg



T_1
mg
T_2

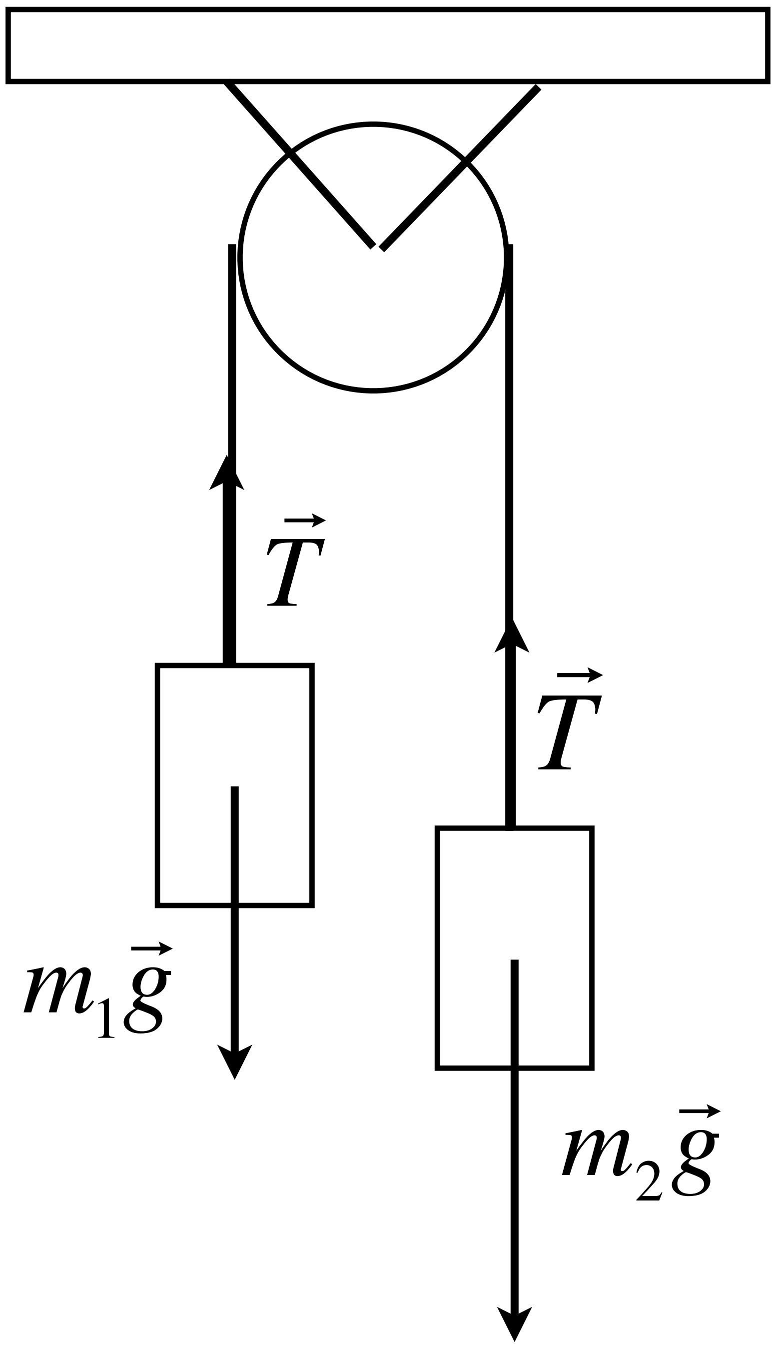
Contraintes géométriques : cordes



- transmettent une tension
- si infiniment rigide, les déplacements sont liés :

$$dx_1 = -dx_2$$

Machine d'Atwood



La machine d'Atwood consiste de deux masses liés à travers d'une poulie par une corde inélastique, de masse négligeable.
Le mouvement est seulement vertical, nous pouvons donc écrire les équations de mouvement en 1D. Nous dirigeons le sens positif vers le bas :

$$m_1 a_1 = m_1 g - T$$

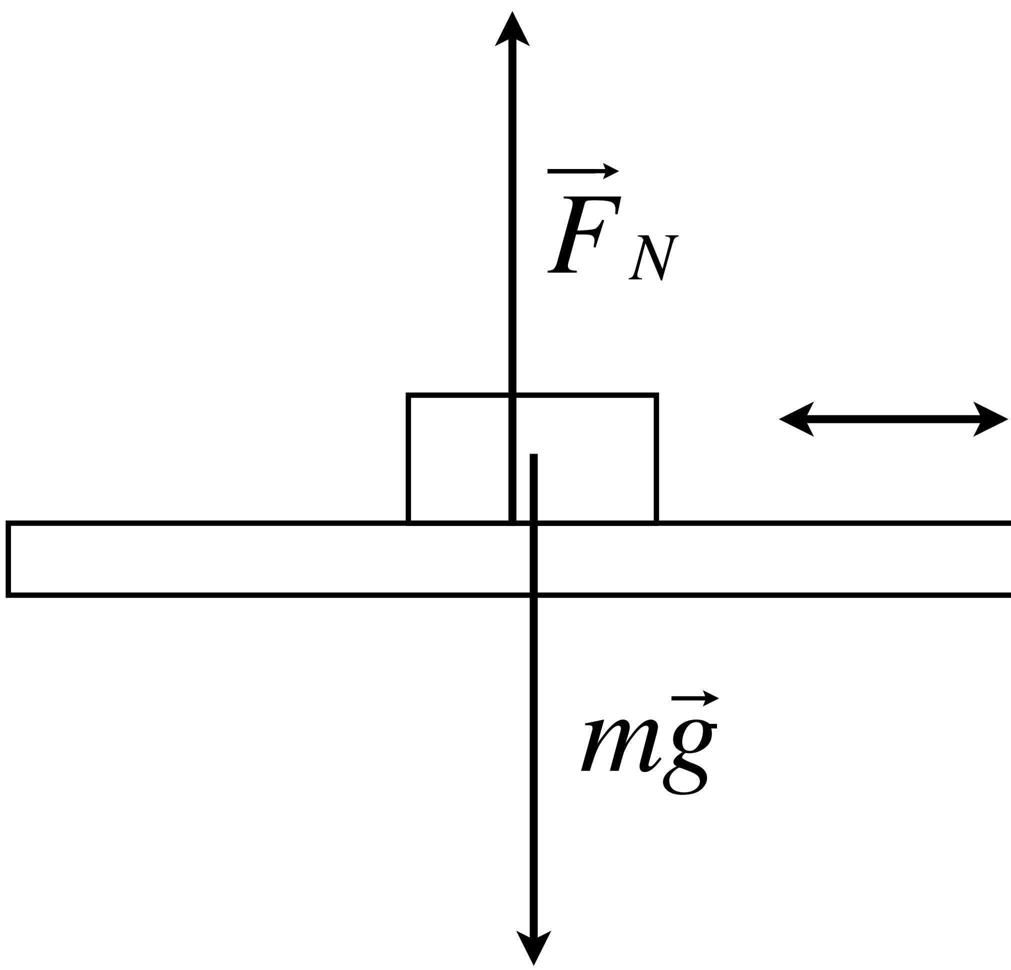
$$m_2 a_2 = m_2 g - T$$

$$a_1 = -a_2$$

La dernière équation exprime que les deux masses sont liées par une corde. Les solutions pour a_1 et T sont :

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Contraintes géométriques et forces de liaison



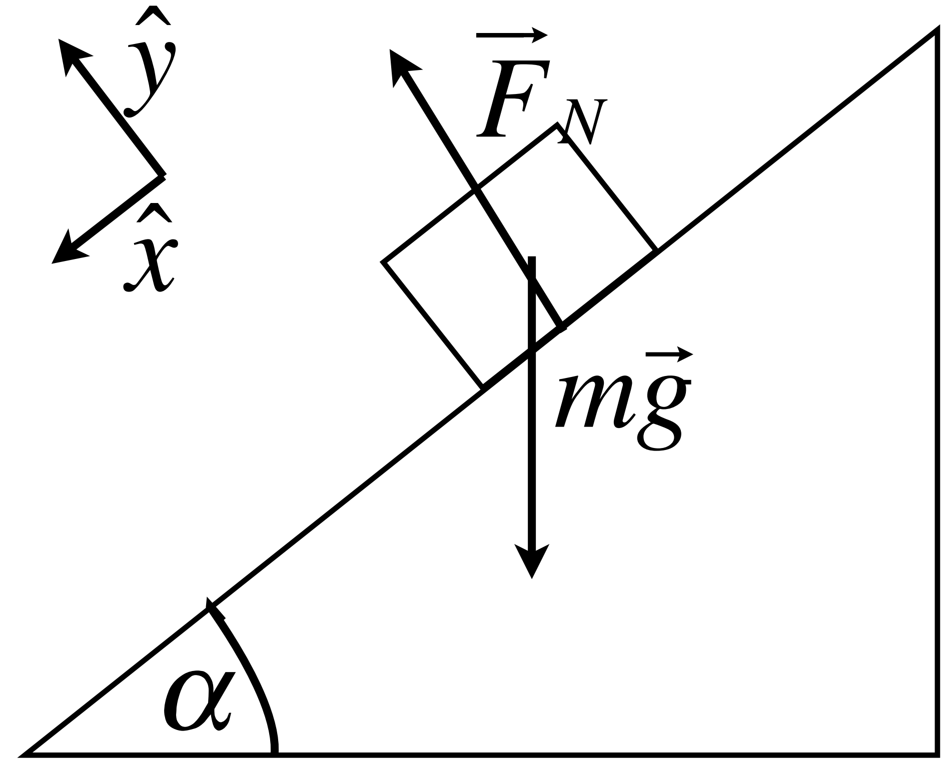
$$\vec{F}_N = -m\vec{g}$$

- perpendiculaire à la surface ou à la trajectoire
- pas de composante tangente

Les équations de mouvement selon les deux directions orthogonales :

$$ma_x = mg\sin\alpha$$

$$ma_y = F_N - mg\cos\alpha$$



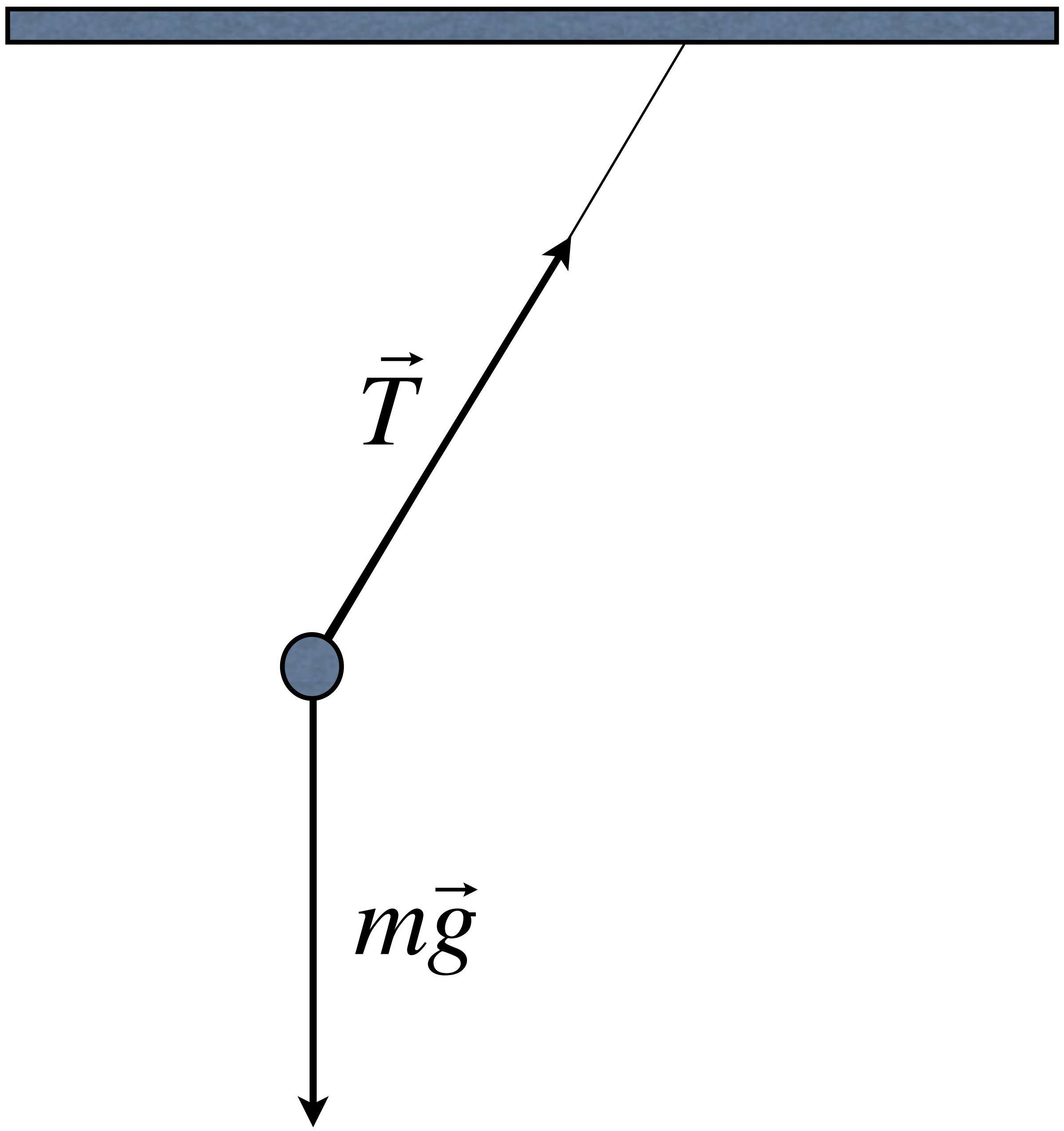
Le fait que le mouvement soit contraint par la surface, et le choix de repère $a_y = 0$ permet de déterminer la force normale, qui est due à cette contrainte géométrique :

$$F_N = mg\cos\alpha$$

L'accélération a_x peut être déterminée à partir de la première équation :

$$a_x = g\sin\alpha$$

Contraintes géométriques : pendule

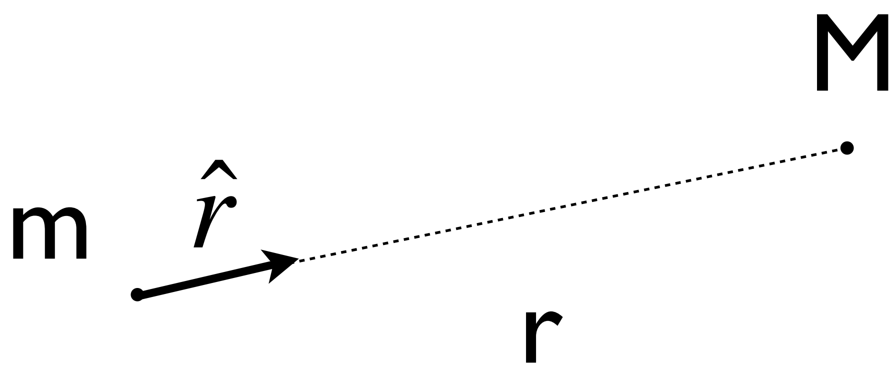


$\vec{T}$ s'ajuste automatiquement pour assurer que la longueur de la corde reste constante et la masse suit la trajectoire (pour avoir juste la bonne accélération)

Forces

- forces de contact
    - pousser ou tirer qqch
    - comprimer un ressort
    - tenir
    - frottement sec
    - frottement visqueux
- forces de champ
    - gravité
    - électrostatique
    - magnétique
    - intéraction forte
    - intéraction faible

Force gravitationnelle

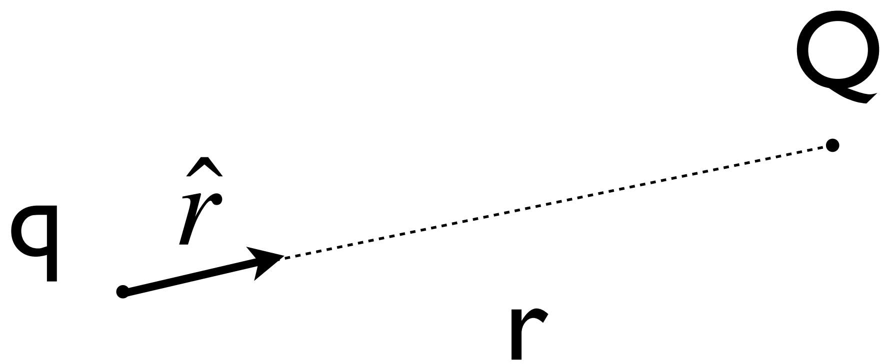


$$\vec{F}_{2\rightarrow 1} = G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

$$G = 6{,}67E-11\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

force toujours attractive

Force électrostatique



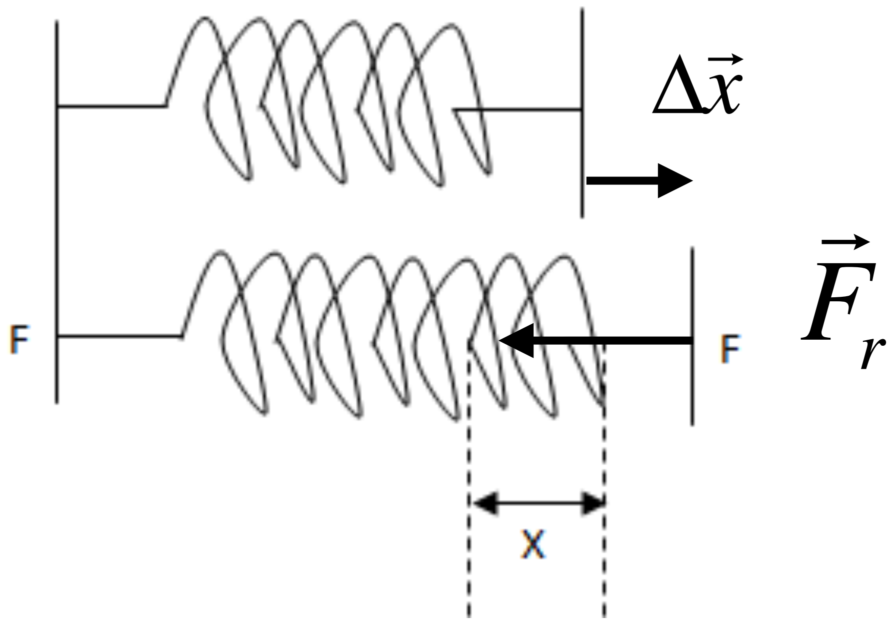
$$\vec{F}_{2\to 1} = -k\,\frac{qQ}{r^2}\,\hat{r}$$

$$k \approx 9E9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$

répulsive entre charges de même signe

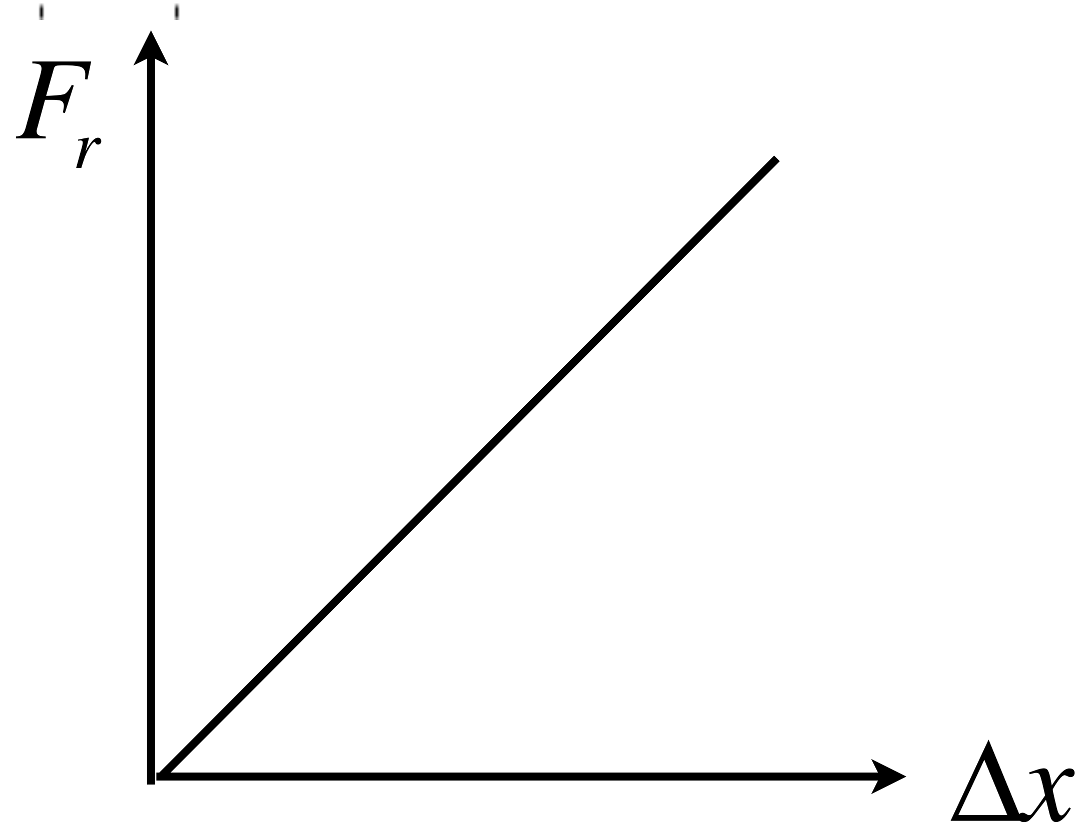
attractive entre charges de signes opposés

Force harmonique



$$\vec{F}_r = -k\Delta\vec{x}$$

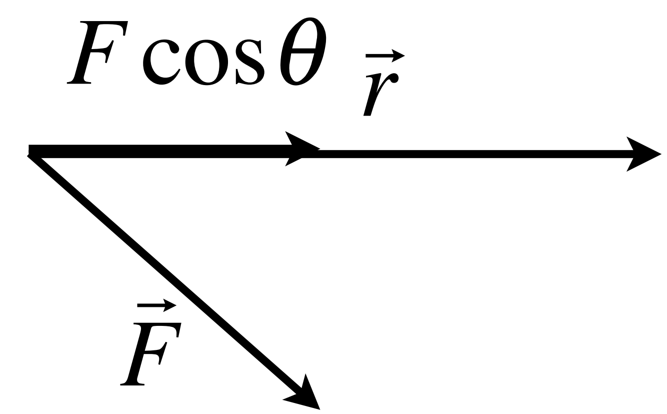
conséquence de la loi de Hooke



Travail

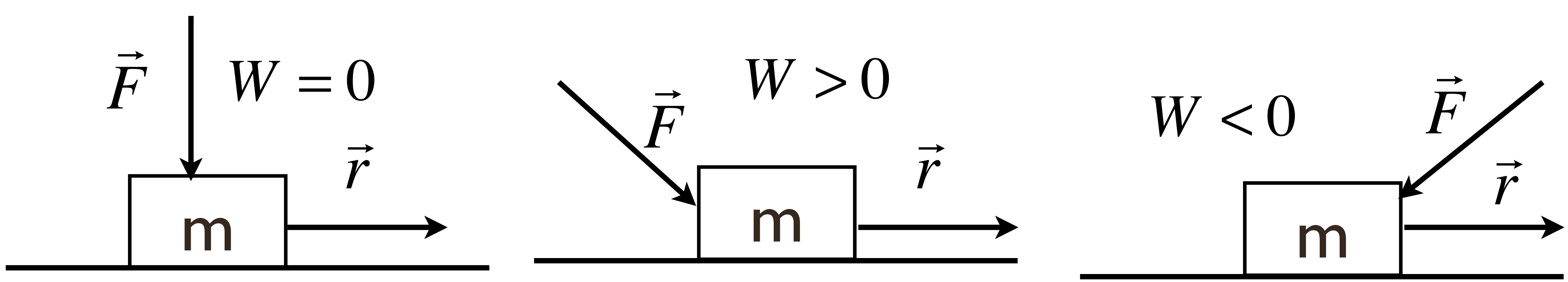
Introduisons une quantité qui est utile si la force est donnée en fonction de la position que nous appelons **travail** :

$$W = \vec{F}\vec{r} = \left\|\vec{F}\right\|\left\|\vec{r}\right\|\cos\theta$$



$$\left[W\right] = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}$$ Joule

$$dW_{ext} = \vec{F}_{ext}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



Travail d'une force :

Pour simplicité, considérons un cas avec F constante, et mouvement selon x uniquement

$$W_{ext} = \int F_{ext}\, dx = \int ma\, dx = \int m \frac{dv}{dt} dx = \int m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx = \int mv\, dv$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Energie cinétique

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2}$$

Si une force externe fait un travail sur une particule, et son unique effet est le changement de sa vitesse, alors :

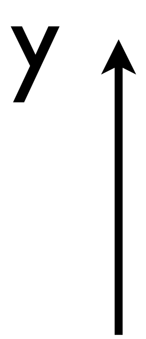
$$E_{Cf} - E_{Ci} = W_{ext}$$

Energie potentielle gravitationnelle

Imaginons la situation où nous levons quelque chose à vitesse constante dans le champ gravitationnel :

$$W_{ext} = \int F_{ext}\, dy = \int mg\, dy = mg(y_f - y_i)$$

$$F_{ext} = mg \text{ car } a = 0$$



$$\boxed{E_{Pg} = mgy}$$

- c'est l'énergie potentielle gravitationnelle.
- Potentielle signifie que cette énergie peut être transformée en énergie cinétique.
- Nous avons le choix libre où nous mettons le zéro
- L'axe y est dirigé vers le haut!

Energie potentielle élastique

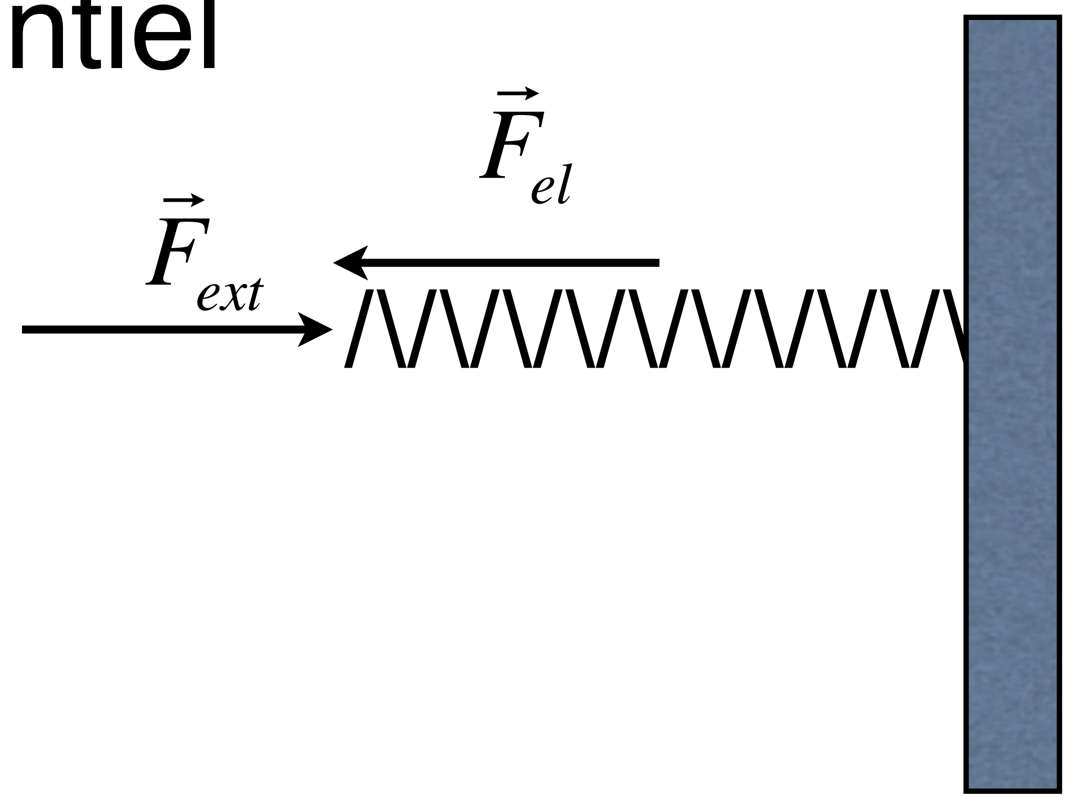
Imaginons la situation où nous comprimons un ressort à vitesse constante :

$$W_{ext} = \int F_{ext}\, dx = \int kx\, dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

$$\boxed{E_{el} = \frac{1}{2}kx^2}$$

- c'est l'énergie potentielle élastique.
- l'élongation est mesurée depuis l'état neutre (détendu) du ressort

Relation entre force conservative et potentiel



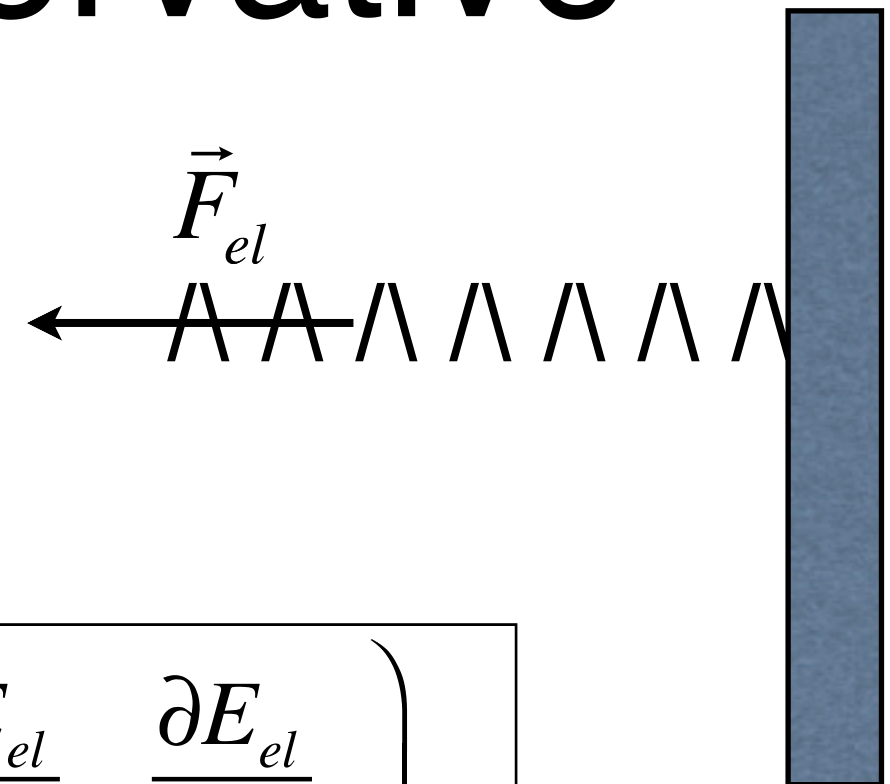
$$W_{ext} = \int_A^B \vec{F}_{ext}\, d\vec{r} = \int_A^B kx\, dx$$

$$kx = \frac{dE_{el}}{dx} \qquad E_{el}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$W_{ext} = \int_A^B \frac{dE_{el}}{dx}\, dx = E_{el}(B) - E_{el}(A)$$

Force conservative

$$F_{el} = -\frac{dE_{el}}{dx}$$



$$\boxed{\vec{F}_{cons} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_{el}}{\partial x} & \dfrac{\partial E_{el}}{\partial y} & \dfrac{\partial E_{el}}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

le travail d'une force conservative est indépendant de la trajectoire suivie

$\longleftrightarrow$

le travail d'une force conservative sur n'importe quelle trajectoire fermée est zéro.

Conservation de l’énergie mécanique

Considérons la variation de l’énergie cinétique sous l’effet d’une force externe. Nous considérons le cas unidimensinnelle pour éviter les problèmes mathématiques :

$$W_{ext} = E_{Cf} - E_{Ci}$$

$$\int_i^f F dx = E_{Cf} - E_{Ci}$$

$$\int_i^f -\frac{dU}{dx} dx = E_{Cf} - E_{Ci}$$

$$E_{Pi} - E_{Pf} = E_{Cf} - E_{Ci}$$

Uniquement si

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$\boxed{E_{Pi} + E_{Ci} = E_{Pf} + E_{Cf}}$$

La somme de l’énergie potentielle est cinétique est l’énergie mécanique

Illustration : chute libre

Calculons la vitesse d'atterissage après une chute libre

cinétique

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v(t) = -gt$$

$$0 = y(t_0)$$

$$\Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

$$v(t_0) = \sqrt{2gy_0}$$

travail

$$W = E_{Cf} - E_{Ci}$$

$$\int_{y_0}^{0} -mg\,dy = \frac{1}{2} m v^2$$

$$mgy_0 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{2gy_0}$$

conservation d'énergie

$$mgy + \frac{1}{2} m v^2 = const$$

$$mgy_0 + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{2gy_0}$$

Travail et puissance

$$dW = \vec{F} d\vec{r}$$

$$\left[P\right] = \mathrm{W}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Watt, aprés James Watt

1 J=1 Ws

1kWh = 3600 kJ

$$P = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$P = \vec{F} \vec{v}$$